Условия 5 класс

17 апреля

Помните: важен не только правильный ответ, но и путь, которым вы к нему пришли. Поэтому оформляйте свои решения аккуратно и разборчиво, подробно расписывайте все свои рассуждения.

1. Ахмед Цебиев родился 01.01.1935. В этот день выполняется правило: сумма цифр года рождения в 9 раз больше суммы цифр дня и месяца ($1 + 9 + 3 + 5 = 9 \cdot ((0 + 1) + (0 + 1))$). Найдите ближайшую следующую дату после 01.01.1935, для которой выполняется то же самое правило. Не забудьте обосновать свой ответ.

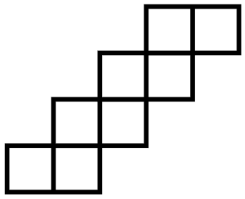
2. Ахмед написал на доске число 1 или 2, а Хамзат — число 2 или 3. Оказалось, что они написали различные числа. Сколькими способами они могли это сделать?

3. В ряд выстроились 100 человек. Первые 5 человек, начиная с самого первого в ряду, назвали свои имена: Тимур, Хусейн, Анжела, Тая, Луиза. После того, как все люди в ряду по очереди назвали свои имена, новых имён не прозвучало и оказалось, что среди любых 5 человек, стоящих подряд, нет двух с одинаковым именем. Как звали человека на 73 месте?

4. Два бегуна соревнуются между собой: первый бежит постоянно со скоростью 10 км/ч, а второй придерживается следующей стратегии: 5 минут бежит со скоростью 30 км/ч, а потом 10 минут стоит на месте и отдыхает, после чего повторяет свои действия. Известно, что первый пробегает дистанцию за 2 часа. Кто победит в гонке?

5. Пять животных, капибары и бобрята, пришли на важное совещание и сели за круглый стол, стулья которого пронумерованы по часовой стрелке натуральными числами от 1 до 5. Все капибары между собой договорились говорить друг другу правду, а бобрятам врать. Бобрята же договорились говорить друг другу правду, а капибарам всегда врать. Животные, сидящие на стульях с нечётными номерами, сказали своему соседу по часовой стрелке "Большинство из нас — капибары", а животные, сидящие на чётных местах, сказали соседям по часовой стрелке "Большинство из нас — бобрята". Сколько капибар было за столом?

6. *Горизонтальной доминошкой* называется прямоугольник, составленный из двух одинаковых квадратиков, у которых есть общая боковая сторона. Назовём *лесенкой* фигуру, которая получается из горизонтальных доминошек (со сторонами 1 см и 2 см), каждая следующая ставится сверху на прошлую, но со со сдвигом вправо на 1 см. На картинке ниже приведён пример лесенки, составленной из 4 горизонтальных доминошек. Саша составил из нескольких горизонтальных доминошек лесенку. Известно, что периметр лесенки равен 650 см. Какова площадь этой лесенки?



Решения 5 класс

17 апреля

1. Ахмед Цебиев родился 01.01.1935. В этот день выполняется правило: сумма цифр года рождения в 9 раз больше суммы цифр дня и месяца ($1 + 9 + 3 + 5 = 9 \cdot ((0 + 1) + (0 + 1))$). Найдите ближайшую следующую дату после 01.01.1935, для которой выполняется то же самое правило. Не забудьте обосновать свой ответ.

Ответ. 10.01.1935.

Решение. Сумма цифр года 1935 равна $1+9+3+5 = 18$. По условию, она должна быть в 9 раз больше суммы цифр дня и месяца, значит сумма цифр дня и месяца должна равняться $\frac{18}{9} = 2$. Ищем ближайшую дату после 01.01.1935, у которой сумма цифр дня и месяца равна 2. Рассмотрим январь: сумма цифр месяца равна $0 + 1 = 1$. Тогда сумма цифр дня должна быть равна 1. Сумму цифр 1 дают числа 01 и 10, но 01 уже прошло. Следующее подходящее число — 10. Таким образом, искомая дата — 10.01.1935.

2. Ахмед написал на доске число 1 или 2, а Хамзат — число 2 или 3. Оказалось, что они написали различные числа. Сколькими способами они могли это сделать?

Ответ. 3

Решение. Заметим, что всего у них есть 4 возможные выписанные пары: $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(2, 2)$, $(2, 3)$. Заметим, что во всех парах, кроме $(2, 2)$ числа различны. Таким образом, подходящих варианта 3.

3. В ряд выстроились 100 человек. Первые 5 человек, начиная с самого первого в ряду, назвали свои имена: Тимур, Хусейн, Анжела, Тая, Луиза. После того, как все люди в ряду по очереди назвали свои имена, новых имён не прозвучало и оказалось, что среди любых 5 человек, стоящих подряд, нет двух с одинаковым именем. Как звали человека на 73 месте?

Ответ. Анжела.

Решение. Пронумеруем детей по порядку числами от 1 до 100. Докажем следующее вспомогательное утверждение: у детей, номера которых отличаются ровно на 5, имена совпадают. Рассмотрим пару детей, номера которых отличаются на 5. Пусть их номера i и $i+5$. Между ними стоят 4 ребёнка с номерами $i+1, i+2, i+3, i+4$. Тогда пятёрки детей $\{i, i+1, i+2, i+3, i+4\}$ и $\{i+1, i+2, i+3, i+4, i+5\}$ отличаются ровно в одном человеке. При этом из условия мы знаем, что в любой пятёрке идущих подряд людей все имена различны и совпадают с именами первой пятёрки. Таким образом, имена детей с номерами i и $i+5$ точно совпадают.

Докажем ещё одно вспомогательное утверждение: если номера людей отличаются на число, кратное 5, то их имена тоже совпадают. Рассмотрим пару людей с номерами i и j, где $j-i$ делится на 5 и $i < j$. Из прошлого утверждения мы знаем, что совпадают имена людей с номерами i и $i+5$, $i+5$ и $i+10$, и так далее. Тогда, поскольку $j-i$ делится на 5, то, прибавив к номеру i число 5 $\frac{j-i}{5}$ раз, мы получим $i + 5 \cdot \frac{j-i}{5} = i + (j - i) = j$, то есть имена людей с номерами i и j совпадают.

Тогда имя человека с номером 73 совпадает с именем человека с номером 3, поскольку $73 - 3 = 70$ делится на 5. А значит, человека на 73 месте зовут Анжела.

4. Два бегуна соревнуются между собой: первый бежит постоянно со скоростью 10 км/ч, а второй придерживается следующей стратегии: 5 минут бежит со скоростью 30 км/ч, а потом 10 минут стоит на месте и отдыхает, после чего повторяет свои действия. Известно, что первый пробегает дистанцию за 2 часа. Кто победит в гонке?

Ответ. Второй.

Решение. Рассмотрим первые 15 минут гонки: первый бегун без перерывов бежит с постоянной скоростью, в это же время второй бежит со скоростью в 3 раза больше, но по времени всего 5 минут, то есть в 3 раза меньше. Понятно, что за эти 15 минут они пробегут равное расстояние. Если оба бегуна начинают в одной точке, то через 15 минут они снова окажутся в одной точке. Поскольку первый пробегает всю дистанцию за 2 часа, то есть за 120 минут, мы можем разбить всё время гонки на 8 отрезков по 15 минут. В конце каждого из таких отрезков оба бегуна находятся в одной точке. Рассмотрим последний отрезок: оба бегуна начинают в одной точке, однако второй бежит втрое быстрее. Он пробежит весь этот отрезок за 5 минут и ещё 10 будет отдыхать, а значит, он финиширует раньше на 10 минут и победит в гонке!

5. Пять животных, капибары и бобрята, пришли на важное совещание и сели за круглый стол, стулья которого пронумерованы по часовой стрелке натуральными числами от 1 до 5. Все капибары между собой договорились говорить друг другу правду, а бобрятам врать. Бобрята же договорились говорить друг другу правду, а капибарам всегда врать. Животные, сидящие на стульях с нечётными номерами, сказали своему соседу по часовой стрелке "Большинство из нас — капибары", а животные, сидящие на чётных местах, сказали соседям по часовой стрелке "Большинство из нас — бобрята". Сколько капибар было за столом?

Ответ. 3.

Решение 1. Заметим, что из утверждений "Большинство из нас капибары" и "Большинство из нас бобрята" ровно одно верное, так как сразу и тех, и тех больше или меньше половины быть не может. Утверждение "Большинство из нас капибары" прозвучало 3 раза, а "Большинство из нас бобрята" — 2 раза. Кроме того, так как за столом звучали различные утверждения, то за столом обязательно есть как капибары, так и бобрята.

Из условия мы знаем, что животные разных видов врут друг другу, а одного вида говорят правду друг другу. Все животные за столом разбиваются на группы: в группу входят животные одного вида, сидящие подряд. Все животные в таких группах, кроме крайнего, говорят своему соседу верное утверждение, а вот крайнее животное говорит ложь, так как его сосед точно другого вида. Значит, неверные утверждения звучат именно на стыках таких групп. Так как группы чередуются(группа капибар, группа бобрят, группа капибар и тд), то таких стыков будет чётное число, следовательно ложных утверждений прозвучало чётное число. Значит, ложным является утверждение "Большинство из нас — бобрята".

Теперь мы можем восстановить, какие животные где сидят, исходя из чередования изначальных высказываний. Так как первое утверждение было верным, то на 1 и 2 стульях сидят животные одного вида, пусть первого вида. Далее на стульях 2 и 3

сидят животные разных видов, то есть животное на стуле 3 сидит животное второго вида. Рассуждая аналогично получим, что животные первого типа сидят на местах 1, 2, 5. То есть за столом сидит 3 животных первого типа — большинство, а значит животные первого типа — это капибары. Значит капибар — 3.

Решение 2. Если на первом месте сидел бобёр и он соврал, то соврали все сидевшие на нечётных местах, а сидевшие на чётных сказали правду. Так как первый соврал, на втором месте сидела капибара. Она сказала правду, тогда на третьем тоже сидела капибара. Она соврала, тогда на четвёртом сидел бобёр. Он сказал правду, тогда на пятом сидела капибара. Капибар больше.

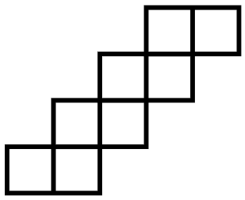
Если на первом месте сидел бобёр и он сказал правду, то соврали все сидевшие на чётных местах, а сидевшие на нечётных сказали правду. Так как первый сказал правду, на втором месте сидел бобёр. Он соврал, тогда на третьем сидела капибара. Она сказала правду, тогда на четвёртом сидела капибара. Она соврала, тогда на пятом сидел бобёр. Бобров больше, значит, первый соврал — противоречие.

Если на первом месте сидела капибара и она сказала правду, то соврали все сидевшие на чётных местах, а сидевшие на нечётных сказали правду. Так как первый сказал правду, на втором месте сидела капибара. Она соврала, тогда на третьем сидел бобёр. Он сказал правду, тогда на четвёртом сидел бобёр. Он соврал, тогда на пятом сидела капибара. Капибар больше.

Если на первом месте сидела капибара и она соврала, то соврали все сидевшие на нечётных местах, а сидевшие на чётных сказали правду. Так как первый соврал, на втором месте сидел бобёр. Он сказал правду, тогда на третьем сидел бобёр. Он соврал, тогда на четвёртом сидела капибара. Она сказала правду, тогда на пятом сидела капибара. Капибар больше.

Как мы видим, во всех возможных случаях капибар больше. Значит их три.

6. *Горизонтальной доминошкой* называется прямоугольник, составленный из двух одинаковых квадратиков, у которых есть общая боковая сторона. Назовём *лесенкой* фигуру, которая получается из горизонтальных доминошек (со сторонами 1 см и 2 см), каждая следующая ставится сверху на прошлую, но со со сдвигом вправо на 1 см. На картинке ниже приведён пример лесенки, составленной из 4 горизонтальных доминошек. Саша составил из нескольких горизонтальных доминошек лесенку. Известно, что периметр лесенки равен 650 см. Какова площадь этой лесенки?



Ответ. 324 см^2.

Решение. Будем называть самую верхнюю и самую нижнюю доминошки в лесенке *крайними*, остальные будем называть *внутренними*. Заметим, что крайние доминошки добавляют к периметру по 5 сантиметров, так как ровно одна из сторон одного

из квадратиков оказывается внутри фигуры. В это же время каждая внутренняя доминошка добавляет к периметру 4 см, так как нижняя сторона левого квадрата и верхняя сторона правого квадрата находятся внутри квадрата. Таким образом, периметр лесенки без двух крайних доминошек равен $650 - 2 \cdot 5 = 640$. Значит, внутренних доминошек $640 : 4 = 160$, то есть всего доминошек 162. Мы знаем, что одна доминошка имеет площадь 2 см^2, а значит, вся лесенка имеет площадь 324 см^2.

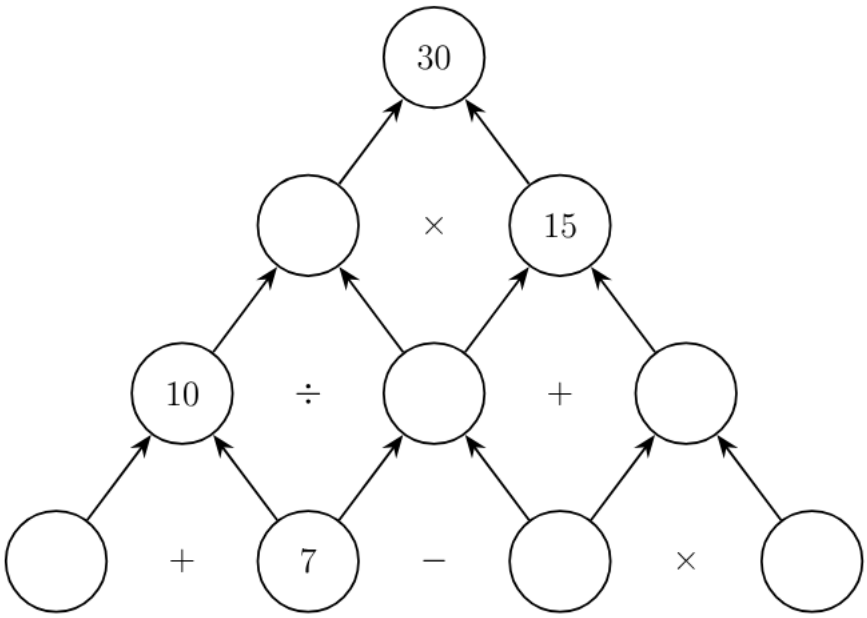
Условия 6 класс

17 апреля

Помните: важен не только правильный ответ, но и путь, которым вы к нему пришли. Поэтому оформляйте свои решения аккуратно и разборчиво, подробно расписывайте все свои рассуждения.

1. Ахмед Цебиев родился 01.01.1935. В этот день выполняется правило: сумма цифр года рождения в 9 раз больше суммы цифр дня и месяца ($1 + 9 + 3 + 5 = 9 \cdot ((0 + 1) + (0 + 1))$). Найдите ближайшую следующую дату после 01.01.1935, для которой выполняется то же самое правило. Не забудьте обосновать свой ответ.

2. В схему были записаны числа таким образом, что для каждого знака действия над ним был записан результат выполнения этого действия для числа справа и числа слева от знака. После этого Ахмед стёр некоторые числа. Какие числа изначально были записаны в пустых клетках?



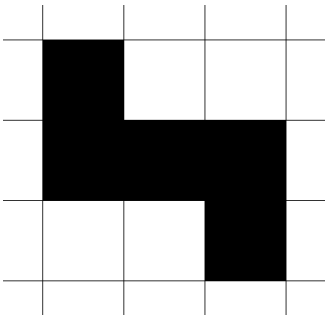
3. По кругу стоят 100 человек разного роста. Каждый из них сказал: "Один из моих соседей выше меня, а другой — ниже". Какое наибольшее число людей могло сказать правду?

4. Назовём *зигзагом* фигуру из 5 клеток с картинки. Как на клетчатой доске 8×8 разместить без наложений

(a) 8 зигзагов?

(b) 9 зигзагов?

Зигзаги можно поворачивать и переворачивать. Убедитесь, что на вашей картинке понятно, где какой зигзаг.



5. Есть два ведра разных ёмкостей и бочка. Известно, что если наполнить оба ведра и перелить воду в бочку, то бочка заполнится на четверть. Если наполнить бочку целиком, то из неё можно будет набрать ровно 5 больших вёдер. Сколько полных маленьких вёдер можно набрать из заполненной бочки?

6. Двадцать пять животных, капибары и бобры, пришли на важное совещание и сели за круглый стол, стулья которого пронумерованы по часовой стрелке натуральными числами от 1 до 25. Все капибары между собой договорились говорить друг другу правду, а бобрам врать. Бобры же договорились говорить друг другу правду, а капибарам всегда врать. За столом начались переговоры. Животные, сидящие на стульях с нечётными номерами, сказали своим соседям по часовой стрелке "Большинство из нас — капибары", а животные, сидящие на чётных местах заявили "Большинство из нас — бобры". Сколько капибар было за столом?

7. В каждой клетке доски 3×3 лежит по монете. Среди них есть настоящие и фальшивые, но, к сожалению, на вид монеты неразличимы. Настоящие монеты весят одинаково. Фальшивых монет ровно 2, они весят одинаково и легче настоящих. Также известно, что они лежат в соседних по стороне клетках. За одно взвешивание можно сравнить две соседние по стороне монеты: в результате прибор покажет, какая монета тяжелее, либо покажет, что монеты равны по весу. Как найти обе фальшивые монеты за 4 взвешивания?

Решения 6 класс

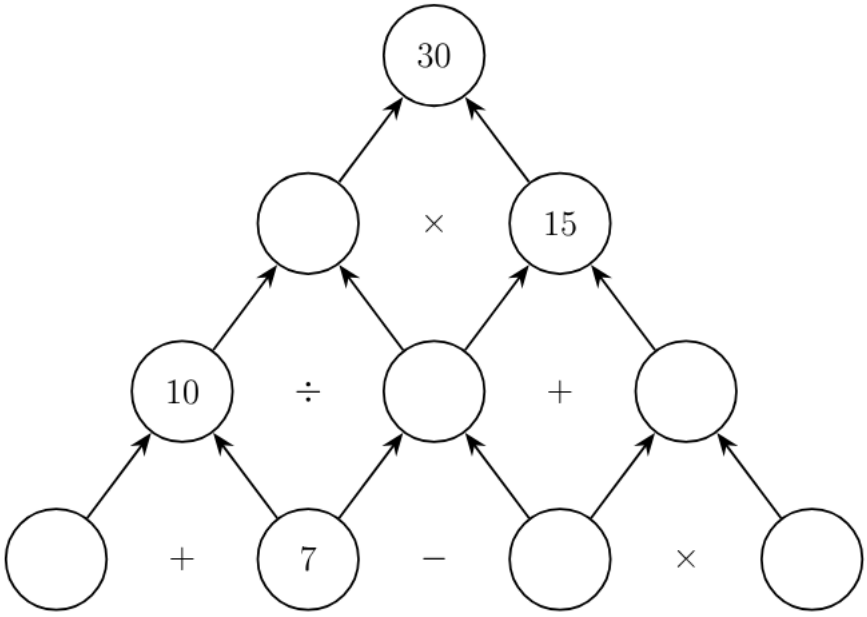
17 апреля

1. Ахмед Цебиев родился 01.01.1935. В этот день выполняется правило: сумма цифр года рождения в 9 раз больше суммы цифр дня и месяца ($1 + 9 + 3 + 5 = 9 \cdot ((0 + 1) + (0 + 1))$). Найдите ближайшую следующую дату после 01.01.1935, для которой выполняется то же самое правило. Не забудьте обосновать свой ответ.

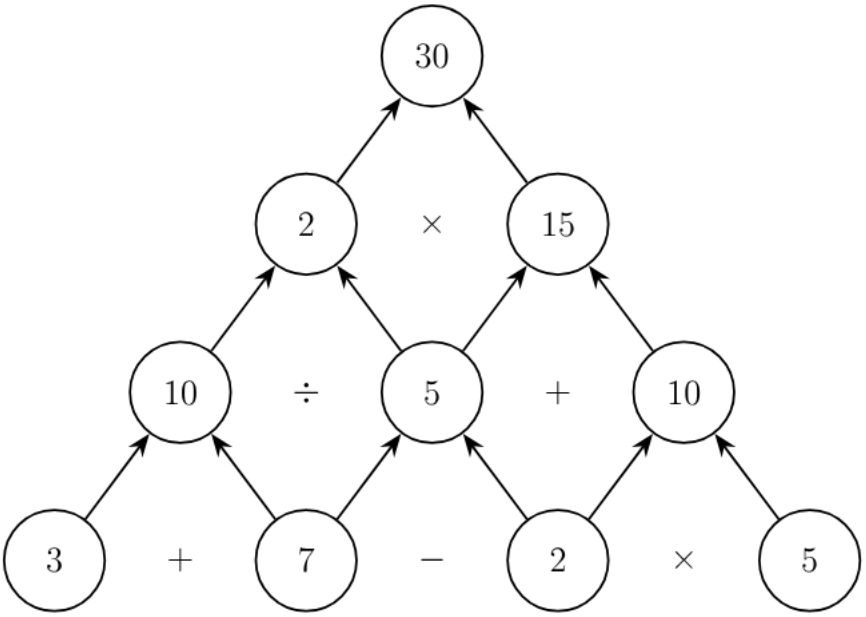
Ответ. 10.01.1935.

Решение. Сумма цифр года 1935 равна $1 + 9 + 3 + 5 = 18$. По условию, она должна быть в 9 раз больше суммы цифр дня и месяца, значит сумма цифр дня и месяца должна равняться $\frac{18}{9} = 2$. Ищем ближайшую дату после 01.01.1935, у которой сумма цифр дня и месяца равна 2. Рассмотрим январь: сумма цифр месяца равна $0 + 1 = 1$. Тогда сумма цифр дня должна быть равна 1. Сумму цифр 1 дают числа 01 и 10, но 01 уже прошло. Следующее подходящее число — 10. Таким образом, искомая дата — 10.01.1935.

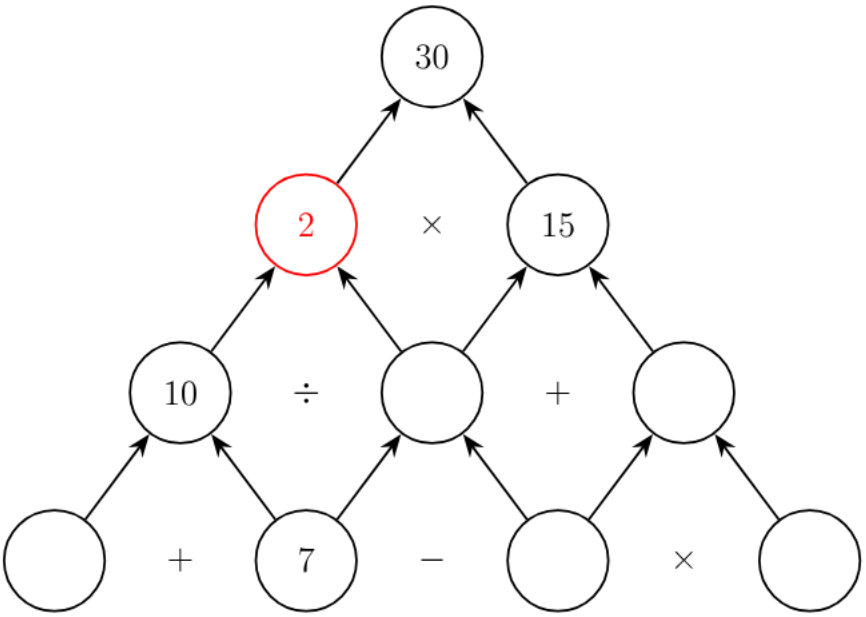
2. В схему были записаны числа таким образом, что для каждого знака действия над ним был записан результат выполнения этого действия для числа справа и числа слева от знака. После этого Ахмед стёр некоторые числа. Какие числа изначально были записаны в пустых клетках?



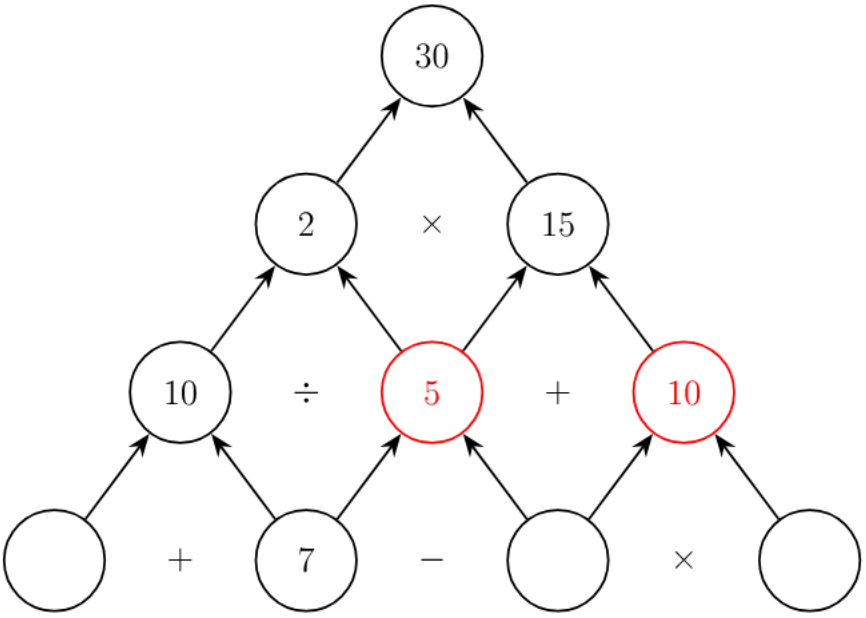
Ответ. Во втором уровне 2, в третьем уровне 5 и 10. В нижнем уровне 3, 2 и 5.



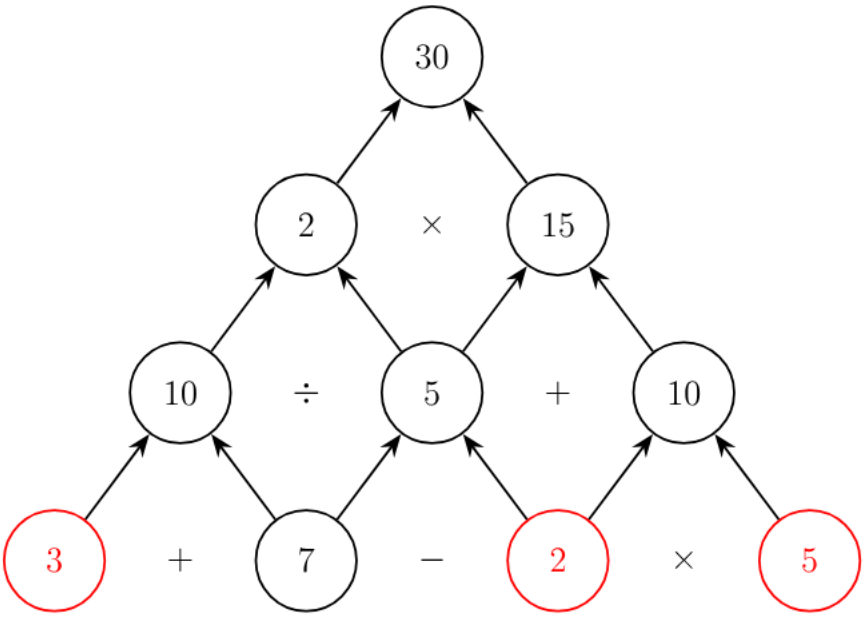
Решение. Будем нумеровать уровни схемы сверху-вниз. Пусть во втором уровне стоит число x. После умножения на 15 получилось 30, так что $x = 2$.



Теперь заполним третий уровень. Пусть там стоят числа y и z в середине и справа соответственно. Тогда $10 \div y = 2$ и $y = 5$. Также $5 + z = 15$. Значит, $z = 10$. Получаем заполненный третий уровень:



Пусть в четвёртом уровне стоят числа a, b, c слева-направо. Тогда $a + 7 = 10$ и $a = 3$. Далее $7 - b = 5$, то есть $b = 2$. Наконец, $2 \cdot c = 10$ и $c = 10$. Получаем полностью заполненную схему:



3. По кругу стоят 100 человек разного роста. Каждый из них сказал: "Один из моих соседей выше меня, а другой — ниже". Какое наибольшее число людей могло сказать правду?

Ответ. 98

Решение. Для начала приведём пример, в котором 98 человек сказали правду. Пусть люди имеют рост $100, 101, \ldots, 199$. Тогда выстроим их по росту и замкнём в круг. Правду скажут все, кроме людей ростом 100 и 199. Теперь докажем, что хотя бы два человека солгали. Рассмотрим самого высокого и самого низкого людей. Заметим, что

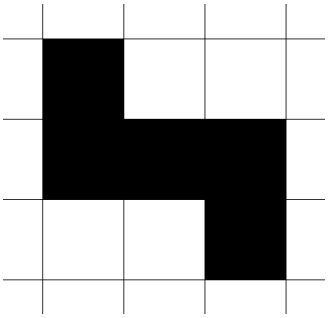
у высокого не может быть соседей выше, чем он сам, а у низкого более низкого соседа. Значит, как минимум они солгали, а правду сказать могло не более 98 людей.

4. Назовём *зигзагом* фигуру из 5 клеток с картинки. Как на клетчатой доске 8×8 разместить без наложений

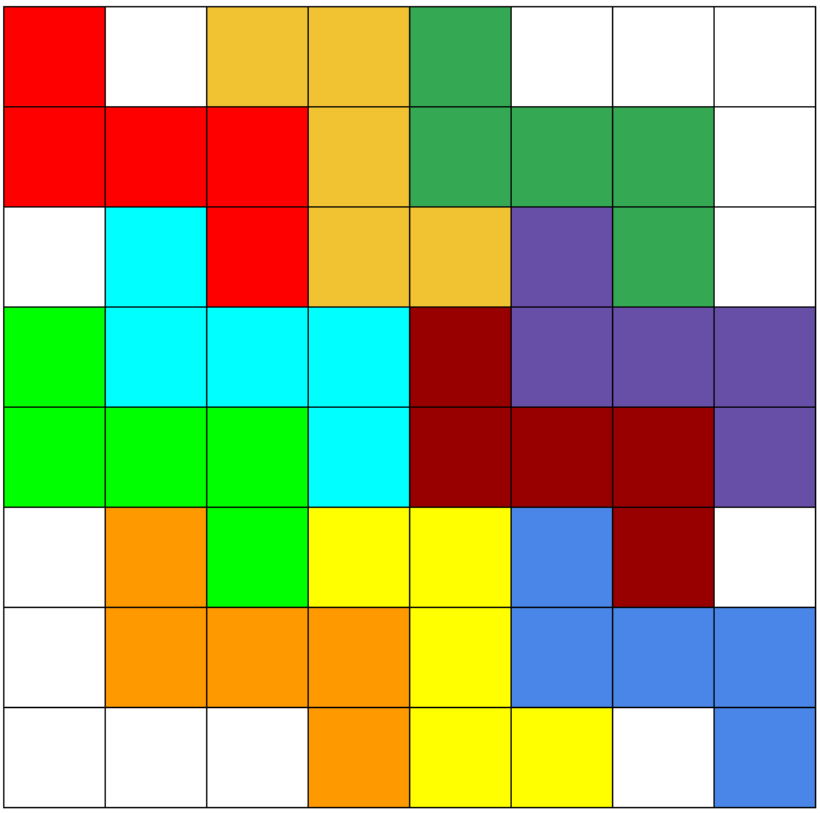
(a) 8 зигзагов?

(b) 9 зигзагов?

Зигзаги можно поворачивать и переворачивать. Убедитесь, что на вашей картинке понятно, где какой зигзаг.



Решение. Оказывается, на доске 8×8 можно разместить даже 10 зигзагов! Пример приведём на картинке.



5. Есть два ведра разных ёмкостей и бочка. Известно, что если наполнить оба ведра и перелить воду в бочку, то бочка заполнится на четверть. Если наполнить бочку целиком, то из неё можно будет набрать ровно 5 больших вёдер. Сколько полных маленьких вёдер можно набрать из заполненной бочки?

Ответ. 20

Решение. По условию 5 больших вёдер занимают целую бочку. Значит, одно большое ведро занимает пятую часть бочки. Вместе с маленьким ведром большое занимает четверть бочки. Значит, маленькое ведро занимает $\frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$ часть бочки. Следовательно, из полной бочки можно набрать 20 маленьких вёдер.

6. Двадцать пять животных, капибары и бобры, пришли на важное совещание и сели за круглый стол, стулья которого пронумерованы по часовой стрелке натуральными числами от 1 до 25. Все капибары между собой договорились говорить друг другу правду, а бобрам врать. Бобры же договорились говорить друг другу правду, а капибарам всегда врать. За столом начались переговоры. Животные, сидящие на стульях с нечётными номерами, сказали своим соседям по часовой стрелке "Большинство из нас — капибары", а животные, сидящие на чётных местах заявили "Большинство из нас — бобры". Сколько капибар было за столом?

Ответ. 13.

Решение. Заметим, что из утверждений "Большинство из нас капибары" и "Большинство из нас бобры" ровно одно верное, так как сразу и тех, и тех больше или меньше половины быть не может. Утверждение "Большинство из нас капибары" прозвучало 13 раз, а "Большинство из нас бобры" — 12 раз. Кроме того, так как за столом звучали различные утверждения, то за столом обязательно есть как капибары, так и бобры.

Из условия мы знаем, что животные разных видов врут друг другу, а одного вида говорят правду друг другу. Все животные за столом разбиваются на группы: в группу входят животные одного вида, сидящие подряд. Все животные в таких группах кроме крайнего говорят своему соседу верное утверждение, а вот крайнее животное говорит ложь, так как его сосед точно другого вида. Значит неверные утверждения утверждения звучат именно на стыках таких групп. Так как группы чередуются(группа капибар, группа бобров, группа капибар и тд), то таких стыков будет чётное число, следовательно ложных утверждений прозвучало чётное число. Значит, ложным является утверждение "Большинство из нас бобры".

Теперь мы можем восстановить какие животные, где сидят, исходя из чередования изначальных высказываний. Так как первое утверждение было верным, то на 1 и 2 стульях сидят животные одного вида, пусть первого вида. Далее на стульях 2 и 3 сидят животные разных видов, то есть животное на стуле 3 сидит животное второго вида. Рассуждая аналогично получим, что животные первого типа сидят на местах 1, 2, 5, 6, 9, 10, 13, 14, 17, 18, 21, 22, 25. То есть за столом сидят 13 животных первого типа — большинство, а значит животные первого типа — это капибары.

7. В каждой клетке доски 3×3 лежит по монете. Среди них есть настоящие и фальшивые, но, к сожалению, на вид монеты неразличимы. Настоящие монеты весят одинаково. Фальшивых монет ровно 2, они весят одинаково и легче настоящих. Также известно, что они лежат в соседних по стороне клетках. За одно взвешивание можно сравнить две соседние по стороне монеты: в результате прибор покажет, какая монета тяжелее, либо покажет, что монеты равны по весу. Как найти обе фальшивые монеты

за 4 взвешивания?

Решение. Пронумеруем клетки доски и будем обозначать взвешивания через пару клеток, которые мы сравниваем.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Первыми тремя взвешиваниями будем исследовать среднюю монету: сравним пары $(2, 5)$, $(4, 5)$ и $(5, 6)$. Среди монет $2, 4, 6$ хотя бы две настоящие, поэтому, если монета 5 тоже настоящая, то должно получиться хотя бы два равенства. Если же монета 5 фальшивая, то должно получиться хотя бы два неравенства. Значит, мы можем однозначно определить, является ли монета 5 настоящей.

Предположим, что она фальшивая. Тогда, если все три раза получилось неравенство, то фальшивая пара $(5, 8)$. Если же в каком-то взвешивании было равенство, то это и есть пара фальшивых монет.

Теперь предположим, что монета 5 настоящая. Если в одном из взвешиваний получилось неравенство, то мы нашли одну из фальшивых монет. Докажем, что в случае трёх равенств мы также обнаружим одну фальшивую монету. Заметим, что любая пара соседних монет содержит одну монету с чётным номером. Значит, если монеты $2, 4, 6$ настоящие, то монета 8 обязательно фальшивая.

Итак, за 3 взвешивания мы нашли фальшивую монету с чётным номером. Без ограничения общности можно считать, что монета 2 фальшивая. Поскольку монета 5 настоящая, фальшивыми могут быть только две пары: $(1, 2)$ и $(2, 3)$. Проверим пару $(1, 2)$. Если там равенство, то фальшивая пара $(1, 2)$. Если неравенство, то фальшивая пара $(2, 3)$.

Условия 7 класс

17 апреля

Помните: важен не только правильный ответ, но и путь, которым вы к нему пришли. Поэтому оформляйте свои решения аккуратно и разборчиво, подробно расписывайте все свои рассуждения.

1. Ахмед Цебиев родился 01.01.1935. В этот день выполняется правило: сумма цифр года рождения в 9 раз больше суммы цифр дня и месяца ($1 + 9 + 3 + 5 = 9 \cdot ((0 + 1) + (0 + 1))$). Найдите ближайшую следующую дату после 01.01.1935, для которой выполняется то же самое правило. Не забудьте обосновать свой ответ.

2. Ахмед на каникулах решил продолжить общаться со своим другом Хамзатом, но у них нет телефонов. Поэтому они используют специальный аппарат с двумя кнопками: одна кнопка отсылает сигнал А, а другая — сигнал Б. Если три раза подряд нажать на одну и ту же кнопку, то прибор ломается. Ахмед сделал 4 нажатия, при этом прибор не сломался. Сколько разных последовательностей сигналов мог получить Хамзат?

3. Что больше: сумма всех нечетных чисел от 1 до 2027 включительно или сумма всех четных чисел от 2 до 2026 включительно? На сколько?

4. На стороне AC треугольника ABC выбрали точки P и Q такие, что $BA = AP$ и $CB = CQ$. Биссектрисы треугольника ABC пересекаются в точке I. Докажите, что $IP = IQ$.

5. Тимур из 7Б и ещё 19 его знакомых по лицею поехали на экскурсию. Выяснилось, что в любой группе из пяти экскурсантов обязательно найдутся двое, кто учится в одном классе. А в любой группе из восьми человек количество ребят из одного класса не превышает пяти. Сколько учеников 7Б класса было на экскурсии?

6. В каждой клетке доски 3×3 лежит по монете. Среди них есть настоящие и фальшивые, но, к сожалению, на вид монеты неразличимы. Настоящие монеты весят одинаково. Фальшивых монет ровно 2, они весят одинаково и легче настоящих. Также известно, что они лежат в соседних по стороне клетках. За одно взвешивание можно сравнить две соседние по стороне монеты: в результате прибор покажет, какая монета тяжелее, либо покажет, что монеты равны по весу. Как найти обе фальшивые монеты за 4 взвешивания?

7. Каждое из чисел 161, 246 и 382 поделили с остатком на некоторое натуральное число N, большее 1. В результате получились три одинаковых остатка. Какой остаток получится, если 272 поделить на N? Найдите все варианты и докажите, что других нет.

Решения 7 класс

17 апреля

1. Ахмед Цебиев родился 01.01.1935. В этот день выполняется правило: сумма цифр года рождения в 9 раз больше суммы цифр дня и месяца ($1 + 9 + 3 + 5 = 9 \cdot ((0 + 1) + (0 + 1))$). Найдите ближайшую следующую дату после 01.01.1935, для которой выполняется то же самое правило. Не забудьте обосновать свой ответ.

Ответ. 10.01.1935.

Решение. Сумма цифр года 1935 равна $1 + 9 + 3 + 5 = 18$. По условию, она должна быть в 9 раз больше суммы цифр дня и месяца, значит сумма цифр дня и месяца должна равняться $\frac{18}{9} = 2$. Ищем ближайшую дату после 01.01.1935, у которой сумма цифр дня и месяца равна 2. Рассмотрим январь: сумма цифр месяца равна $0 + 1 = 1$. Тогда сумма цифр дня должна быть равна 1. Сумму цифр 1 дают числа 01 и 10, но 01 уже прошло. Следующее подходящее число — 10. Таким образом, искомая дата — 10.01.1935.

2. Ахмед на каникулах решил продолжить общаться со своим другом Хамзатом, но у них нет телефонов. Поэтому они используют специальный аппарат с двумя кнопками: одна кнопка отсылает сигнал А, а другая — сигнал Б. Если три раза подряд нажать на одну и ту же кнопку, то прибор ломается. Ахмед сделал 4 нажатия, при этом прибор не сломался. Сколько разных последовательностей сигналов мог получить Хамзат?

Ответ. 10.

Решение. Наше условие гарантирует, что Хамзат не может получить последовательность АААА и ББББ, так как иначе прибор бы сломался. Кроме того, последовательности, где есть три подряд сигнала А или три подряд сигнала Б, тоже получиться не могли. Для начала поймем, какие могли получиться последовательности, если в них участвуют 3 буквы А и 1 буква Б. Возможны только варианты АБАА и ААБА. Аналогично можно понять, что вариантов с 1 буквой А и 3 буквами Б тоже 2(БАББ и ББАБ). Теперь рассмотрим случай, в котором букв А и Б поровну. Давайте последовательно перебирать такие варианты:

1. буква А самая первая: таких вариантов 3 — ААББ, АБАБ, АББА.
2. буква А стоит второй: таких вариантов 2 — БААБ, БАБА.
3. буква А стоит третьей: такой вариант ровно 1 — ББАА.

Получается, что способов с двумя буквами А $1 + 2 + 3 = 6$. Таким образом, всего вариантов $2 + 2 + 6 = 10$.

3. Что больше: сумма всех нечетных чисел от 1 до 2027 включительно или сумма всех четных чисел от 2 до 2026 включительно? На сколько?

Ответ. Сумма нечётных больше на 1014.

Решение. Сопоставим каждому нечетному числу четное число, меньшее его на 1. В каждой такой паре разность нечетного и четного будет 1 в пользу нечетных. В пару к единице поставим чётное число 0, которое не изменит сумму чётных. Тогда получим

пары вида

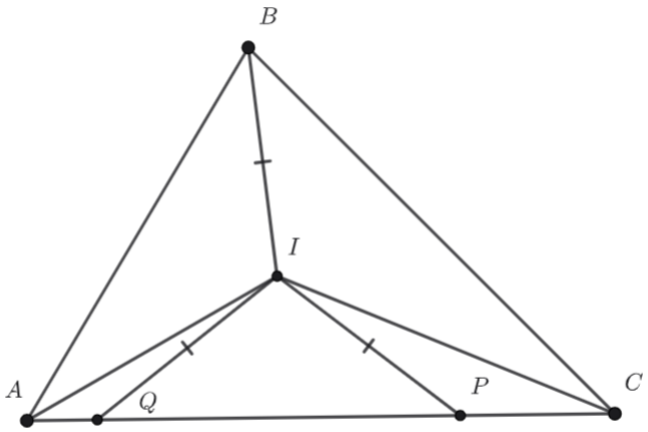
$$(2027 - 2026), \ldots, (1 - 0)$$

Таким образом, сумма нечетных больше на количество пар, то есть $2028/2 = 1014$, значит и вся сумма на 1014 больше.

4. На стороне AC треугольника ABC выбрали точки P и Q такие, что $BA = AP$ и $CB = CQ$. Биссектрисы треугольника ABC пересекаются в точке I. Докажите, что $IP = IQ$.

Решение. По условию, треугольник BAP — равнобедренный, I в нем биссектриса, а значит, I лежит на серединном перпендикуляре к BP. Следовательно, $IP = IB$. Аналогично из равнобедренного треугольника BCQ и биссектрисы CI получаем $IQ = IB$.

То есть $IP = IB = IQ$, что и требовалось доказать.



5. Тимур из 7Б и ещё 19 его знакомых по лицею поехали на экскурсию. Выяснилось, что в любой группе из пяти экскурсантов обязательно найдутся двое, кто учится в одном классе. А в любой группе из восьми человек количество ребят из одного класса не превышает пяти. Сколько учеников 7Б класса было на экскурсии?

Ответ. 5 учеников.

Решение. Первое условие про любых 5 человек означает, что классов не больше 4. Действительно, если классов хотя бы 5, выберем по одному человеку из каждого класса. Тогда в этой группе условие не выполняется — противоречие.

Второе условие про 8 человек означает, что людей из одного класса в не больше 5. Действительно, если людей из одного класса хотя бы 6, выберем группу из 6 людей этого класса и ещё двух экскурсантов. Тогда в этой группе условие не выполняется — противоречие.

Тогда всего получается людей максимум $5 \cdot 4 = 20$ — ровно как в условии. Значит, одноклассников Саши ровно 4, а вместе с ним получается 5 учеников 7Б класса.

6. В каждой клетке доски 3×3 лежит по монете. Среди них есть настоящие и фальшивые, но, к сожалению, на вид монеты неразличимы. Настоящие монеты весят одинаково. Фальшивых монет ровно 2, они весят одинаково и легче настоящих. Также

известно, что они лежат в соседних по стороне клетках. За одно взвешивание можно сравнить две соседние по стороне монеты: в результате прибор покажет, какая монета тяжелее, либо покажет, что монеты равны по весу. Как найти обе фальшивые монеты за 4 взвешивания?

Решение. Пронумеруем клетки доски и будем обозначать взвешивания через пару клеток, которые мы сравниваем.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Первыми тремя взвешиваниями будем исследовать среднюю монету: сравним пары $(2, 5)$, $(4, 5)$ и $(5, 6)$. Среди монет $2, 4, 6$ хотя бы две настоящие, поэтому, если монета 5 тоже настоящая, то должно получиться хотя бы два равенства. Если же монета 5 фальшивая, то должно получиться хотя бы два неравенства. Значит, мы можем однозначно определить, является ли монета 5 настоящей.

Предположим, что она фальшивая. Тогда, если все три раза получилось неравенство, то фальшивая пара $(5, 8)$. Если же в каком-то взвешивании было равенство, то это и есть пара фальшивых монет.

Теперь предположим, что монета 5 настоящая. Если в одном из взвешиваний получилось неравенство, то мы нашли одну из фальшивых монет. Докажем, что в случае трёх равенств мы также обнаружим одну фальшивую монету. Заметим, что любая пара соседних монет содержит одну монету с чётным номером. Значит, если монеты $2, 4, 6$ настоящие, то монета 8 обязательно фальшивая.

Итак, за 3 взвешивания мы нашли фальшивую монету с чётным номером. Без ограничения общности можно считать, что монета 2 фальшивая. Поскольку монета 5 настоящая, фальшивыми могут быть только две пары: $(1, 2)$ и $(2, 3)$. Проверим пару $(1, 2)$. Если там равенство, то фальшивая пара $(1, 2)$. Если неравенство, то фальшивая пара $(2, 3)$.

7. Каждое из чисел 161, 246 и 382 поделили с остатком на некоторое натуральное число N, большее 1. В результате получились три одинаковых остатка. Какой остаток получится, если 272 поделить на N? Найдите все варианты и докажите, что других нет.

Ответ. 0.

Решение. Так как у чисел одинаковые остатки, их разности должны делится на N. Тогда найдём разности:

$$246 - 161 = 85 = 5 \cdot 17; \quad 382 - 46 = 136 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 17.$$

Оба числа должны делиться на N, большее 1. Заметим, что общими делителями $85, 136$ являются 1 и их НОД$(85, 136)= 17$, значит $N = 17$.

$272 = 17 \cdot 16$, то есть делится на 17, следовательно, остаток 0.